Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et deux endomorphismes (f, g) de E vérifiant :

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

1. *Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.*
2. *Montrer que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f \circ g)$.*

Solution :

1. *Soit $y \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x) = g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = 0$ car $y \in \operatorname{Ker} f$. Donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont en somme directe. Soit $x \in E$, on écrit $x = [x - g \circ f(x)] + g \circ f(x)$. On a $f(x - g \circ f(x)) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc $x - gof(x) \in \operatorname{Ker} f$. Il est clair que $g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$. Donc $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$. En conclusion, on a bien $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.*
2. *D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ et d'après la question précédente, $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} g$ d'où $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$. Comme $g \circ f \circ g = g$, on a que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ ce qui implique que $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} g \circ f$. De même, comme $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ alors $\operatorname{rg} g \circ f \leqslant \operatorname{rg} g$ et on on obtient que $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} g \circ f$. On fait de même pour la seconde égalité.*

Références