

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in L(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. A quelle condition sur le scalaire λ , $(\text{id} - f)$ est-il inversible? Calculer alors $(\text{id} - f)^{-1}$.

Solution :

1. Comme $\text{rg } f = 1$, il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1)$. On complète le vecteur e_1 en une base (e_1, \dots, e_n) de E . Comme $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_1$. Donc $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_1) = \lambda_i \lambda_1 e_1 = \lambda_1 f(e_i)$. Si $x \in E$ alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ et

$$f^2(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^2(e_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \lambda_1 f(x).$$

Posons alors $\lambda = \lambda_1$. On a bien $f^2(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in E$.

2. Remarquons que $(f - \text{id})(f + (1 - \lambda)\text{id}) = (\lambda - 1)\text{id}$. On en tire une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{id} - f$ soit inversible : il faut et il suffit que $\lambda \neq 1$. On calcule alors

$$(\text{id} - f)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda}(f + (1 - \lambda)\text{id}).$$

Références