Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in L(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. *Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $f^2 = \lambda f$.*
2. *A quelle condition sur le scalaire λ, $(\mathrm{id} - f)$ est-il inversible ? Calculer alors $(\mathrm{id} - f)^{-1}$.*

Solution :

1. *Comme $\operatorname{rg} f = 1$, il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que $\operatorname{Im} f = Vect(e_1)$. On complète le vecteur e_1 en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Comme $\operatorname{Im} f = Vect\,(e_1)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_1$. Donc $f^2(e_i) = f\,(\lambda_i e_1) = \lambda_i \lambda_1 e_1 = \lambda_1 f\,(e_i)$. Si $x \in E$ alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ et*

$$f^2\,(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^2\,(e_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i f\,(e_i) = \lambda_1 f\,(x)\,.$$

   Posons alors $\lambda = \lambda_1$. On a bien $f^2\,(x) = \lambda f\,(x)$ pour tout $x \in E$.

2. *Remarquons que $(f - \mathrm{id})(f + (1-\lambda)\,\mathrm{id}) = (\lambda - 1)\,\mathrm{id}$. On en tire une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{id} - f$ soit inversible : il faut et il suffit que $\lambda \neq 1$. On calcule alors $\boxed{(\mathrm{id} - f)^{-1} = \dfrac{1}{1-\lambda}(f + (1-\lambda)\,\mathrm{id})}$.*

Références