Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 et un endomorphisme u de E tel que u^2=0. Montrer que

$$\exists a \in E : \quad \exists f \in E^\star : \quad \forall x \in E, \quad u(x) = f(x) \cdot a$$

Indication 0.0 : *Traduire en terme d'image et de noyau la relation $u^2 = 0$. Introduire ensuite une base de $\operatorname{Ker} u$ et la compléter. Définir f à l'aide de cette base.*

Solution : *La relation $u^2 = 0$ donne que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ (le montrer). D'après le théorème du rang,*

$$3 = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u)$$

ce qui implique que $\dim(\operatorname{Ker} u) \geqslant 2$. Si $\dim(\operatorname{Ker} u) = 3$, alors $u = 0$ et le résultat est évident avec $f = 0$ et a quelconque.

Supposons donc que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 2$. Alors d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} u) = 1$. C'est une droite vectorielle : $\exists a \in E$, $a \neq 0$ tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a)$. Considérons une base (e_1, e_2) de $\operatorname{Ker} u$ et complétons-la en une base (e_1, e_2, e_3) de E. Puisque $u \neq 0$, $u(e_3) \neq 0$ et donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $u(e_3) = ca$. Définissons la forme linéaire f en se donnant l'image de la base e par f : $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = c$. Soit alors $x \in E$. Décomposons x dans la base e : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Alors $u(x) = x_3ca = x_3f(e_3)a = f(x)a$.

Références