Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un K*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* f, g *de* E *vérifiant* $f \circ g = 0$ *et* $f + g \in GL(E)$*. Montrer que* $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$*.*

Solution :

— *Comme* $f \circ g = 0$ *alors* $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ *et d'après la formule du rang* $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \leqslant \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n$*.*

— *D'autre part, comme* $f + g \in GL(E)$ *alors* $n = \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$ *car* $\mathrm{Im}\,(f + g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$*.*

L'égalité est ainsi prouvée

Références