Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux sous-espace vectoriel E_1, E_2 de E. Montrer que :

$$(\exists u \in L(E) \ \mid \operatorname{Ker} u = E_1 \text{ et } \operatorname{Im} u = E_2) \Longleftrightarrow (\dim E = \dim E_1 + \dim E_2)$$

Indication 0.0 : Pour la réciproque,construire une base de E en complétant une base de E_1. Définir alors u en se donnant l'image de cette base.

Solution :

- $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ *: Le sens direct est une conséquence directe de la formule du rang :* $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u = \dim E_1 + \dim E_2$.
- $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ *: si $E_1 = \{0\}$, alors $\dim E_2 = \dim E$ donc $E_2 = E$. En posant $u = \mathrm{id}$, on vérifie que u convient. De même si $E_2 = \{0\}$, $u = 0$ convient. Supposons maintenant que $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$. Alors, il existe une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E_1 (où $p = \dim E_1$). Complétons cette base en une base de E : $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Comme $\dim E_2 = n - p$, il existe une base f de E_2 de la forme $(f_{p+1}, \dots, f_n)$. Définissons alors u en se donnant l'image de la base e :*

  $$\forall i \in [\![1, p]\!], u(e_i) = 0, \quad \forall i \in [\![p+1, n]\!], u(e_i) = f_{i+1}$$

  Alors, $\forall x \in E_1$, $u(x) = 0$ donc $E_1 \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, décomposons x dans e.

  $$x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p + x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n$$

  $u(x) = x_{p+1} f_{p+1} + \dots + x_n f_n = 0$. Mais comme f est libre, il vient que $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$ et donc que $x \in E_1$.
  D'autre part, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \operatorname{Vect}(f_{p+1}, \dots f_n) = E_2$.

Références