Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et deux endomorphismes $(u, v) \in L(E)$. Montrer que

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) + n$$

Indication 0.0 : On pourra étudier la restriction $\widetilde{u}$ de u à $\operatorname{Im} v$ et montrer que $\operatorname{Im} \widetilde{u} = \operatorname{Im}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker} \widetilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$, puis appliquer le théorème du rang à $\widetilde{u}$.

Solution : *Considérons la restriction de u à $\operatorname{Im} v$: $\widetilde{u} = u_{|\operatorname{Im} v}$. On vérifie facilement que $\operatorname{Im} u \circ v = \operatorname{Im} \widetilde{u}$ et que $\operatorname{Ker} \widetilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$. En appliquant le théorème du rang à $\widetilde{u}$, on trouve que*

$$\dim(\operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Mais $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$ et donc, en appliquant le théorème du rang pour u, on trouve que

$$\operatorname{rg} v \leqslant (n - \operatorname{rg} u) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Références