Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, un vecteur x_0 de E et un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ soit libre.

1. *Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.*
2. *Montrer que f est inversible.*

Solution :

1. *Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0$. Alors $f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{i+1}(x_0)$. Mais la famille $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ est libre donc $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ ce qui prouve que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre*
2. *Comme $\dim E = n$, les familles $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ et $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ sont des bases de E. Comme l'image de la première base par f est la seconde base, f est forcément inversible.*

Références