# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

**Exercice 0.1** ★★ **Pas de titre**

*Soit $f \in \mathfrak{L}(E, F)$ avec $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Dire, pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de $f$ :*

1. *L'image de toute famille libre de $E$ par $f$ est libre*
2. $\operatorname{Im} f = F$
3. *L'image d'une base de $E$ par $f$ est génératrice de $F$.*
4. $\operatorname{rg} f = n$.
5. *L'image d'une base de $E$ par $f$ est libre.*
6. $\operatorname{rg} f = p$.
7. *L'image d'une base de $E$ par $f$ est une base de $F$.*
8. *L'image de toute famille génératrice de $E$ par $f$ est génératrice de $F$.*
9. $\exists g \in \mathfrak{L}(F, E), \quad g \circ f = \mathrm{id}_E$
10. $\exists g \in \mathfrak{L}(F, E), \quad f \circ g = \mathrm{id}_F$

***Solution :***

1. *Supposons que l'image de toute famille libre est libre. Montrons que $f$ est injective. Considérons une base $e$ de $E$ et un vecteur $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. Notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de $x$ dans la base $e$. On a donc : $0 = f(x) = \sum_{k=0}^{n} x_i f(e_i)$. Mais la famille $e = (e_1, \dots, e_n)$ étant libre, il en est de même de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. L'égalité précédente n'est donc vraie que si $x_1 = \dots = x_n = 0$ et alors $x = 0$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et que $f$ est injective.*
2. *Si $\operatorname{Im} f = F$ alors $f$ est surjective.*
3. *Si l'image d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ par $f$ est génératrice de $F$ alors montrons que $f$ est surjective. Soit $y \in F$. La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est donc génératrice de $f$ et il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $y = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$. Par conséquent, $y = f(x)$ avec $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ et $f$ est bien surjective.*
4. *Si $\operatorname{rg} f = n$ alors $f$ est injective. En effet, d'après la formule du rang, on a : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ et il vient que $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.*

5. *Si l'image d'une base* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *de* $E$ *par* $f$ *est libre dans* $F$ *alors montrons que* $f$ *est injective. Soit* $x \in E$ *tel que* $f(x) = 0$ *et soit* $(x_1, \dots, x_n)$ *les coordonnées de* $x$ *dans la base* $E$*. Alors* $0 = f(x) = \sum_{k=0}^{n} x_i f(e_i)$*. On termine alors comme dans la première question et on montre que* $x = 0$ *c'est-à-dire que* $f$ *est injective.*
6. *Si* $\operatorname{rg} f = p$ *alors par définition du rang d'une application linéaire,* $\dim \operatorname{Im} f = p = \dim F$ *et donc* $\operatorname{Im} f = F$*. On prouve ainsi que* $f$ *est surjective.*
7. *Si l'image d'une base de* $E$ *par* $f$ *est une base de* $F$ *alors en appliquant les résultats des questions* 3) *et* 5)*, il vient que* $f$ *est bijective.*
8. *Si l'image de toute famille de* $E$ *par* $f$ *est génératrice de* $F$ *alors en particulier l'image d'une base de* $e$ *est génératrice de* $F$ *et appliquant la question* 3*,* $f$ *est surjective.*
9. *Si il existe* $g \in \mathfrak{L}(F, E)$ *tel que* $g \circ f = \mathrm{id}_E$ *alors* $g$ *est surjective et* $f$ *injective. Pour que* $f$ *soit surjective, il faudrait supposer de plus que* $\dim F = \dim E$*.*
10. *Si il existe* $g \in \mathfrak{L}(F, E)$ *tel que* $f \circ g = \mathrm{id}_F$ *alors* $f$ *est surjective et* $g$ *injective. Pour que* $f$ *soit injective, il faudrait supposer de plus que* $\dim F = \dim E$*.*

# Références