Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit un sous-espace vectoriel F de E. On suppose que $F \subset u(F)$.

1. *On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $u(F) = F$.*
2. *Trouver un contre-exemple lorsque E est de dimension infinie.*

Indication 0.0 : *Pour la deuxième question, on pourra étudier* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ *avec* $F = \{XP \ ; \ P \in E\}$.

Solution :

1. *Considérons la restriction de u à F : $u_{|F} : F \to E$. Alors d'après la formule du rang, $\dim u(F) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim V$. Comme $F \subset u(F)$, on a aussi que $\dim F \leqslant \dim u(F)$. Donc $\dim F = \dim u(F)$ et $F = u(F)$.*
2. *En considérant $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{XP \ ; \ P \in E\}$, l'application $u : P \mapsto P'$ fournit un contre-exemple puisque $u(F) = E \neq F$.*

Références