Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On définit l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est un isomorphisme.*
2. *En déduire qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 1, P'(1) = 2, P''(1) = -1$ et $P''(2) = 1$.*

Solution :

1. *Il est clair que φ est linéaire. Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$. Considérons $H = P - P(1)$. Comme $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, il vient que 1 est racine d'ordre 3 de H, donc $H = (X-1)^3 Q$ et donc $P = Q(X-1)^3 + P(1)$. Mais en examinant les degrés, il faut que $Q = \lambda \in \mathbb{R}$ d'où $P = \lambda(X-1)^3 + a$ (avec $a = P(1) \in \mathbb{R}$). Comme $P(0) = 0$, $a = -\lambda$ et donc $P = \lambda((X-1)^3 - 1)$. Mais alors $P'' = \lambda(6(X-1))$ et comme $P''(2) = 1$, il vient que $\lambda = 0$ et donc que $P = 0$.*

   Comme φ est injective, et que $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, φ est donc bijective.
2. *Comme φ est bijective, l'élément $(1, 2, -1, 1)$ possède un unique antécédent $P \in \mathbb{R}_3[X]$.*

Références