Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] P \\ \longmapsto & P + P' + P'' \end{cases}$$

1. *Montrer que l'endomorphisme φ est injectif.*
2. *Montrer que l'endomorphisme φ est surjectif.*

Indication 0.0 : Pour montrer la surjectivité, étudier la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace de dimension finie.

Solution :

1. *Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P + P' + P'' = 0$, soit $P = -(P' + P'')$. Si l'on suppose que $P \neq 0$, on a $\deg P \leqslant \deg P - 1$, une absurdité. Donc φ est injective.*
2. *Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Notons φ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) = P + P' + P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg(\varphi_n(P)) \leqslant \max(\deg P, \deg P', \deg P'') \leqslant n$. Donc φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ injectif, donc surjectif, car $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace de dimension finie $n + 1$.*

   Soit alors $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg P$. Alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_n(Q) = P$. Mais alors $\varphi(Q) = P$ et on a donc montré que φ est surjective !

Références