Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = 0\}$.

1. *Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa dimension.*
2. *Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.*

Solution :

1. *Posons* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array} \right.$. *On vérifie facilement que θ est linéaire et surjective. De plus $F = \operatorname{Ker}\theta$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du rang,* $\dim F = \dim \operatorname{Ker}\theta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R} = n$.
2. *Notons $G = \mathbb{R}_0[X]$. G est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension* 1. *On vérifie facilement que G est en somme directe avec F. Comme de plus* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, *on a $\mathbb{R}_n[X] = F + G$. En conclusion, $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus G$.*

Références