Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 2P \end{array} \right.$.

1. *Montrer que* θ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Déterminer* $\operatorname{Im}\theta$ *et en déduire le rang de* θ.
3. *Donner la dimension de* $\operatorname{Ker}\theta$ *et déterminer* $\operatorname{Ker}\theta$.

Solution :

1. *Si* $P \in \mathbb{R}_3[X]$, *il est clair que* $\deg(XP' - 2P) \leqslant 3$ *et donc que* $\theta(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ *alors*

$$\theta(\alpha P + \beta Q) = X(\alpha P + \beta Q)' - 2(\alpha P + \beta Q) = \alpha(XP' - 2P) + \beta(XQ' - 2Q) = \alpha\theta(P) + \beta\theta(Q)$$

donc θ *est linéaire.*

2. *Soit* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. *On calcule que* $\theta(P) = aX^3 - cX - 2d$. *Donc* $\operatorname{Im}\theta = Vect\left(1, X, X^3\right)$. *La famille* $\left(1, X, X^3\right)$ *étant libre, il vient que* $\operatorname{rg}\theta = 3$.
3. *D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Ker}\theta = 1$. *Comme* $\theta\left(X^2\right) = 0$, $\operatorname{Ker}\theta = Vect\left(X^2\right)$.

Références