Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

5 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère $u : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y, t-x) \end{cases}$

1. *Montrer que* u *est une application linéaire et déterminer* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$.
2. *La famille* $((u(1,0,0,0), u(1,1,1,1))$ *est-elle libre dans* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* u *est linéaire. On a*

$$\operatorname{Ker} u = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 2x+y & & =0 \\ -x & +t & =0 \end{cases} \right\} = \{(x,-2x,z,x) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = Vect\,(e_1,e_2)$$

avec $e_1 = (1,-2,0,1)$ *et* $e_2 = (0,0,1,0)$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de* $\operatorname{Ker} u$. *Alors* $\dim \operatorname{Ker} u = 2$ *et d'après la formule du rang* $\dim \operatorname{Im} u = 2$. *Comme* $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^2$ *et que* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, *il vient que* $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ *et donc que* u *est surjective.*

2. *Comme* $u\,(1,0,0,0) = (2,-1)$ *et que* $u\,(1,1,1,1) = (3,0)$ *et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de* $\mathbb{R}^2$.

Références