Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère dans le plan euclidien un triangle équilatéral (ABC) . On choisit un repère orthonormé d'origine le milieu de $[AB]$, avec le vecteur $\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ dans lequel $A \begin{vmatrix} -a \\ 0 \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$ avec $a > 0$.

1. Déterminer les coordonnées du point C .
2. Écrire les équations cartésiennes des droites (AC) et (BC) .
3. Montrer que si M est un point intérieur au triangle, la somme des distances de M à chaque côté du triangle est constante.
4. Retrouver ce résultat en partitionnant le triangle ABC en trois triangles dont on déterminera les aires grâce au déterminant.

Solution :

1. Si $C \begin{vmatrix} 0 \\ c \end{vmatrix}$, on calcule $\|\vec{AC}\|^2 = c^2 + a^2$ qui doit valoir $\|\vec{AB}\|^2 = 4a^2$ d'où l'on tire $c = \sqrt{3}a$ et

donc $C \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{3}a \end{vmatrix}$.

2. Soit $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ un point de la droite (AC) . Il doit vérifier $\det(\vec{AM}, \vec{AC}) = 0$, d'où l'on tire

$$(AC) : \sqrt{3}ax - ay + \sqrt{3}a^2 = 0$$

et de même

$$(BC) : \sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}a^2 = 0$$

3. Soit un point $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ intérieur au triangle. La distance de M à la droite (AB) vaut y ($y \geq 0$).

Appliquons la formule du cours pour calculer la distance de M à la droite (AC) :

$$d(M, AC) = \frac{|\sqrt{3}ax - ay + \sqrt{3}a^2|}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{2}$$

On a utilisé que le point M était à droite de la droite (AC) pour enlever la valeur absolue. De même,

$$d(M, BC) = \frac{|\sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}a^2|}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{-\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{2}$$

La somme des trois distances est constante et vaut $\sqrt{3}a$.

4. Si U, V et W sont trois points du plan, on notera $\mathcal{A}_{UVW}$ l'aire du triangle UVW . On a :

$$\begin{aligned} & d(M, (AB)) + d(M, (BC)) + d(M, (CA)) \\ = & \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})|}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{|\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC})|}{\|\overrightarrow{BC}\|} + \frac{|\det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})|}{\|\overrightarrow{CA}\|} \\ = & \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_1$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$, $\mathcal{A}_2$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\mathcal{A}_3$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CA}$. Mais $\mathcal{A}_1 = 2\mathcal{A}_{MAB}$, $\mathcal{A}_2 = 2\mathcal{A}_{MBC}$ et $\mathcal{A}_3 = 2\mathcal{A}_{MCA}$. Donc :

$$d(M, (AB)) + d(M, (BC)) + d(M, (CA)) = 2(\mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{MCA}) = 2\mathcal{A}_{ABC}$$

ce qui prouve que la somme des trois longueurs est constante.

Références