Existence d'un supplémentaire commun

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Existence d'un supplémentaire commun***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Le but de cet exercice est de montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

1. *Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' (resp. G') dans F (resp. dans G).*
2. *Montrer que F' et G' sont de même dimension.*
3. *Montrer F' et G' sont en somme directe.*
4. *En considérant une base de F' et une base de G', construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.*
5. *Répondre alors au problème initial.*

Solution :

1. *$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F qui est de dimension finie car c'est le cas de E. Donc $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F. On fait de même pour G'.*
2. *Comme $F = F \cap G \oplus F'$, il vient que $\dim F' = \dim F - \dim F \cap G$. De même, $\dim G' = \dim G - \dim F \cap G$. Le résultat s'ensuit alors du fait que F et G ont même dimension. On notera $p = \dim F' = \dim G'$.*
3. *Soit $x \in F' \cap G'$. Comme $F' \subset F$ et que $G' \subset G$, on a $x \in F \cap G$. Mais F' et $F \cap G$ sont supplémentaires donc $x = 0$.*
4. *Comme F' et G' sont de même dimension p, ces deux sous-espaces admettent des bases $f = (f_1, \dots, f_p)$ pour F' et $(g_1, \dots, g_p)$ pour G'. Considérons la famille $h = (h_1, \dots, h_p)$ où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $h_i = f_i + g_i$. Aucun des vecteurs de cette famille n'est dans $F \cup G$. En effet, s'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $h_i \in F \cup G$ alors $h_i \in F$ ou $h_i \in G$. Si $h_i = f_i + g_i \in F$ alors $g_i = f_i - h_i \in F$. Donc $g_i \in F \cap G$. Mais $g_i \in G'$ et les deux sous-espaces G' et $G \cap F$ sont en somme directe, donc $g_i = 0$, ce qui n'est pas possible car la famille g ne serait pas libre. On fait de même si $h_i \in G$. Montrons maintenant que la famille h est libre. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_p h_p = 0$. Alors le vecteur $v = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p = -(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p)$ est élément de $F' \cap G'$. D'après la question*

précédente, $v = 0$ *et* $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p = 0$. *Les familles* f *et* g *étant libres, on en déduit que* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ *et donc que* h *est libre. Posons* $H = Vect\,(h_1, \ldots, h_p)$. *Il est clair que* $\dim H = p$. *Montrons que* $F \cap H = \{0\}$. *Soit* $x \in F \cap H$. *Alors il existe* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i$. *Mais* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i = x - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i$ *et donc le vecteur* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i \in F \cap G$ *ce qui prouve que* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i = 0$ *car ce vecteur est aussi élément de* G'. *Comme la famille* g *est libre, il vient que* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ *et donc* $x = 0$. F *et* H *sont bien en somme directe. Enfin, puisque* F' *est supplémentaire de* F *dans* $F + G$, *donc* $\dim(F+G) = \dim F + \dim F' = \dim F + p = \dim F + \dim H$. *Donc* H *est un supplémentaire de* F *dans* $F + G$. *De même* H *est un supplémentaire de* G *dans* $F + G$.

5. *On considère un supplémentaire* $\widetilde{H}$ *à* $F + G$ *dans* E. *Il existe car* E *est de dimension finie. Montrons que* $H \oplus \widetilde{H}$ *(vérifier que cette somme est bien directe) est un supplémentaire commun à* F *et* G *dans* E. *Soit* $x \in F \cap (H \oplus \widetilde{H})$. *Alors* $x \in F$ *et* $x = a + \widetilde{a}$ *ou* $a \in H$ *et* $\widetilde{a} \in \widetilde{H}$. *Mais* $\widetilde{a} = x - a \in F + H = F + G$ *donc* $\widetilde{a} \in (F+G) \cap \widetilde{H}$ *ce qui amène* $\widetilde{a} = 0$ *et* $x = a$. *Mais comme* $F \cap H = \{0\}$, *il s'ensuit que* $x = 0$ *et donc* F *et* $H \oplus \widetilde{H}$ *sont en somme directe. De plus* $\dim\left(H \oplus \widetilde{H}\right) = \dim(F+G) - \dim F + \dim E - \dim(F+G) = \dim E - \dim F$. *Donc* $F + \left(H \oplus \widetilde{H}\right) = E$ *et* $E = F \oplus \left(H \oplus \widetilde{H}\right)$. *On montre de même que* $E = G \oplus \left(H \oplus \widetilde{H}\right)$

Références