Infinité des supplémentaires

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Infinité des supplémentaires***

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0\}$ et différent de l'espace E. Montrer que F admet une infinité de supplémentaires dans E.

Indication 0.0 : *Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ lorsque F est une droite vectorielle.*

Solution : *Considérons une base de F, $(e_1, \dots, e_p)$ (où $p = \dim F$) et complétons là en une base de E par des vecteurs $e_{p+1}, \dots e_n \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $G_t = Vect(te_1 + e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$. Soit $t \in \mathbb{R}$, montrons que G_t est un supplémentaire de F dans E. Il suffit pour ce faire de montrer que $(e_1, \dots, e_p, te_1 + e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ est une base de E. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1}(te_1 + e_{p+1}) + \alpha_{p+2} e_{p+2} + + \dots \alpha_n e_n = 0$ alors $(\alpha_1 + t\alpha_{p+1}) e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} e_{p+1} + \alpha_{p+2} e_{p+2} + \dots + \alpha_n e_n = 0$ et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, il vient que $\alpha_1 + t\alpha_{p+1} = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_n = 0$ et donc que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. La famille $(e_1, \dots, e_p, te_1 + e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ est donc bien libre et comme son cardinal est égal à la dimension de E, il s'agit bien d'une base de E. En conclusion, $E = F \oplus G_t$.*

Si $t \neq t'$ sont deux réels, alors $G_t \neq G_{t'}$. En effet le vecteur $e_p + te_1$ n'est pas élément de $G_{t'}$. Si c'était le cas, alors il existerait $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $e_{p+1} + te_1 = \alpha_{p+1}(e_{p+1} + t'e_1) + \alpha_{p+2} e_{p+2} + \dots + \alpha_n e_n$. Alors $(\alpha_{p+1} t' - t) e_1 + (\alpha_{p+1} - 1) e_{p+1} + \alpha_{p+2} e_{p+2} + \dots + \alpha_n e_n = 0$. La famille $(e_1, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre comme sous-famille d'une famille libre donc en particulier $\alpha_{p+1} t' - t = \alpha_{p+1} - 1 = 0$ et $t = t'$, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ.

Références