Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = Vect((1,2,1,3),(2,0,0,1)) \text{ et } G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y+z=0, x=y\right\}$$

1. *Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels F et G.*
2. *Montrer que $F \cap G = \{0\}$.*
3. *En déduire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.*

Solution :

1. *Par définition, $S_1 = (f_1, f_2)$ est générateur de F. On vérifie que cette famille est libre. C'est une base de F et donc $\dim F = 2$. Il faut déterminer une famille génératrice de G :*

$$G = \{x(1,1,-3,0) + t(0,0,0,1) \mid (x,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Donc $g_1 = (1,1,-3,0)$ et $g_2 = (0,0,0,1)$ forment une famille génératrice de G. On vérifie qu'il est libre. C'est donc une base de G et $\dim G = 2$.

2. *On vérifie facilement que les vecteurs $(1,2,1,3)$ et $(2,0,0,1)$ ne sont pas solutions du système $\begin{cases} 2x+y+z & = 0 \\ x & = y \end{cases}$ donc $F \cap G = \{0\}$.*
3. *D'après la formule de Grassmann, puisque $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4$ et que $F \cap G = \{0\}$, il vient que $\dim(F+G) = \dim E$ et donc que $F+G = E$. On peut alors écrire que $E = F \oplus G$.*

Références