Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x = y \text{ et } x - y + t = 0\}$$

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et déterminer une base de F.*
2. *Déterminer un supplémentaire de F dans E.*
3. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*

Solution :

1. *On a $F = \{(x, y, z, t) \in E; x = y \text{ et } x - y + t = 0\} = \{(x, x, z, 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = Vect\,(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0, 0)$ et $v = (0, 0, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. En conclusion, (u, v) est une base de F et $\dim F = 2$.*
2. *Introduisons les vecteurs $w = (1, 0, 0, 0)$ et $W = (0, 0, 0, 1)$. On montre facilement que la famille (u, v, w, W) est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et si $G = Vect\,(w, W)$ alors F et G sont en somme directe.*
3. *Ce supplémentaire n'est bien entendu pas unique. On montre de la même façon que précédemment que, par exemple, $G' = Vect\,((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est un autre supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.*

Références