Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, H_1 et H_2 deux hyperplans de E avec $H_1 \neq H_2$. Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Solution : *Calculons tout d'abord $\dim(H_1 + H_2)$. Remarquons que $H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient H_1. On a donc $\dim(H_1 + H_2) = n$ ou $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$. Si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ alors, comme $\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$ et que $H_1 \subset H_1 + H_2$, $H_2 \subset H_1 + H_2$ alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ ce qui contredit le fait que H_1 et H_2 sont distincts. Donc $\dim(H_1 + H_2) = \dim E = n$. La formule de Grassmann amène $\dim H_1 + \dim H_2 = \dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2)$ et donc $\dim(H_1 \cap H_2) = 2n - 2 - n = n - 2$. On peut aussi raisonner avec des formes linéaires. Comme H_2 est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire sur E, $\varphi \in E^\star$ non-nulle telle que $H_2 = \operatorname{Ker}\varphi$. Considérons la restriction $\widetilde{\varphi}$ de la forme linéaire φ au sous-espace H_1. Il est clair que $\widetilde{\varphi}$ est une forme linéaire de H_1 : $\widetilde{\varphi} \in H_1^\star$.*

1. *$\widetilde{\varphi} \neq 0_{H_1^\star}$: par l'absurde, si $\widetilde{\varphi} = 0$, on aurait $\forall x \in H_1$, $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = 0_K$ et donc on aurait $H_1 \subset H_2$. Mais puisque $\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$, on aurait $H_1 = H_2$ ce qui est faux d'après l'énoncé ;*
2. *$H_1 \cap H_2 = \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$:*
   - *Soit $x \in H_1 \cap H_2$, $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = 0_K$,*
   - *Soit $x \in \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$, $x \in H_1$ et $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = 0_K$ et donc $x \in H_1 \cap H_2$;*

Nous avons donc montré que $H_1 \cap H_2$ est un hyperplan de l'espace H_1 et puisque $\dim H_1 = n - 1$, en utilisant le résultat du cours, il vient que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Références