Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

16 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous-ensemble $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des suites p-périodiques :

$$\mathscr{S}_p(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n\}$$

Montrer que $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Solution : *$\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons « $n \bmod p$ »le reste de la division euclidienne de n par p. Introduisons la famille $\left((u_n^i)\right)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de suites données par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^i = \begin{cases} 1 \text{ si } n \bmod p = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Cette famille forme une base de $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i \left(u_n^i\right) = 0$ alors il vient que la suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_1, \dots)$ est nulle et donc que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Donc la famille est libre. Considérons une suite p-périodique $a = (a_1, \dots, a_p, a_1, \dots, a_p, a_1, \dots) \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$. On peut écrire que $a = a_1 \left(u_n^1\right) + \cdots + a_p \left(u_n^p\right)$ et donc la famille engendre $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En conclusion, c'est bien une base de $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{S}_p(\mathbb{R}) = p$. On aurait aussi facilement pu résoudre cet exercice en montrant que

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Références