Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Posons $F = Vect\,(f_1, f_2, f_3)$ *où*

$$f_1 : x \mapsto e^x, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x} \quad \text{et} \quad f_3 : x \mapsto e^{x^2}.$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et en donner la dimension et une base.*

Solution : *L'ensemble* F *étant donné comme un* $Vect$*, c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$*. On a donc :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{x^2} = 0$*. En particulier, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, en divisant par* e^{x^2} *:*

$$0 = \left(\alpha_1 e^{x-x^2} + \alpha_2 e^{2x-x^2} + \alpha_3\right) \xrightarrow[x \to \infty]{} \alpha_3$$

donc $\alpha_3 = 0$*. On a donc en revenant à la première égalité :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} = 0$*. De même, on divise cette égalité par* e^x *et on trouve*

$$0 = (\alpha_1 + \alpha_2 e^x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \alpha_1$$

et nécessairement $\alpha_1 = 0$ *ce qui amène aussi* $\alpha_2 = 0$ *car la fonction exponentielle est strictement positive. La famille* (f_1, f_2, f_3) *est bien libre et* $\dim F = 3$*.*

Références