Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On pose :

$$f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto x^2, \quad f_3 : x \mapsto x \ln x, \quad f_4 : x \mapsto x^2 \ln x$$

On pose aussi : $F = Vect\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$. *Prouver que* F *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

Solution : *L'ensemble* F *s'écrit comme un* $Vect$*, c'est donc un sous-espace de* $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ *et donc un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Soient* $\alpha_i \in \mathbb{R}$*,* $i \in [\![1, 4]\!]$ *tels que* $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0$*. La fonction* f *ainsi que toutes ses dérivées sont identiquement nulles sur* $\mathbb{R}_+^*$*. L'égalité* $f\,(1) = 0$ *amène* $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$*. L'égalité* $f'\,(1) = 0$ *amène* $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ *et* $f''\,(1) = 0$ *amène* $2\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$*. Enfin,* $f'''\,(1) = 0$ *amène* $-\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$*. Le quadruplet* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ *est donc solution du système formé par ces 4 équations. On vérifie en le résolvant que sa seule solution est* $(0, 0, 0, 0)$*. Il vient donc que* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$*. La famille* (f_1, f_2, f_3, f_4) *est libre et* $\dim F = 4$*.*

Références