

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

14 mai 2023

## Exercice 0.1 ★ Pas de titre

On pose :

$$f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto x^2, \quad f_3 : x \mapsto x \ln x, \quad f_4 : x \mapsto x^2 \ln x$$

On pose aussi :  $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ . Prouver que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.

**Solution :** L'ensemble  $F$  s'écrit comme un  $\text{Vect}$ , c'est donc un sous-espace de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  tels que  $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0$ . La fonction  $f$  ainsi que toutes ses dérivées sont identiquement nulles sur  $\mathbb{R}_+$ . L'égalité  $f(1) = 0$  amène  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . L'égalité  $f'(1) = 0$  amène  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$  et  $f''(1) = 0$  amène  $2\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$ . Enfin,  $f'''(1) = 0$  amène  $-\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$ . Le quadruplet  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  est donc solution du système formé par ces 4 équations. On vérifie en le résolvant que sa seule solution est  $(0, 0, 0, 0)$ . Il vient donc que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ . La famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est libre et  $\dim F = 4$ .

## Références