

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c) \sin x$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.

Solution :

1. F est engendré par la famille $(x \mapsto x^2 \sin x, x \mapsto x \sin x, x \mapsto \sin x)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Une base de E est donnée par la famille précédente : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha x^2 \sin x + \beta x \sin x + \gamma \sin x = 0$, alors $\forall x \not\equiv 0 [\pi], \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Un polynôme du second degré est soit identiquement nul, soit ne s'annule au plus que deux fois. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc libre. Elle est, par définition génératrice et forme donc une base de F qui est alors un sous-espace vectoriel de dimension 3 de E .

Références