

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

7 avril 2023

## Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Montrer  $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_4[X]$  et en déterminer une base ainsi que la dimension.

**Solution :** Les polynômes de  $F$  sont de degré  $\leq 4$  et s'annulent en 1 et 2. Par conséquent, ils sont de la forme  $(aX^2 + bX + c)(X - 1)(X - 2)$ . Il s'ensuit que  $F = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  où  $P_1 = X^2(X - 1)(X - 2)$ ,  $P_2 = X(X - 1)(X - 2)$ ,  $P_3 = (X - 1)(X - 2)$ . On en déduit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_4[X]$ . On vérifie facilement que la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est libre. Si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont trois réels tels que  $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$  alors par intégrité de l'anneau des polynômes,  $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_3 = 0$  ce qui n'est possible que si  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . La famille  $(P_1, P_2, P_3)$  forme donc une base de  $F$ .

## Références