Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans le plan, on considère trois points A, B et C non-alignés. Une droite $\mathcal{D}$ coupe les droites (BC), (AC) et (AB) en A', B' et C' respectivement. Par A' on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement aux points E et F la parallèle à (BC) menée par A. Montrer que les droites $(B'E)$ et $(C'F)$ sont parallèles.

Indication 0.0 : Le problème est indépendant du repère choisi, à vous donc de choisir un bon repère...

Solution : *Faire un dessin !*

— ***Choix du repère :*** $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. *Dans ce repère,* $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$. *Comme B' est sur la droite (AC), il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que* $B'\begin{vmatrix}0\\b\end{vmatrix}$. *De même, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que* $C'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$.

— ***Équation cartésienne de la droite*** $\mathcal{D} = (B'C')$ ***:*** *un point* $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ *est sur cette droite si et seulement si* $\det(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'C'}) = 0$, *c'est-à-dire* $\boxed{(B'C') \ : bx + cy - bc = 0}$.

— *On calcule de même l'équation de la droite (BC) et l'on trouve* $\boxed{(BC) \ : x + y - 1 = 0}$.

— ***Coordonnées de*** $A'\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ *: puisque A' est sur la droite $(B'C')$ et sur (BC), ses coordonnées vérifient le système* $\begin{cases} x + y &= 1 \\ bx + cy &= bc \end{cases}$. *On en tire* $\boxed{A'\begin{vmatrix}\dfrac{c(1-b)}{c-b}\\[2mm]\dfrac{b(1-c)}{b-c}\end{vmatrix}}$. *On remarque que le cas où $b = c$ correspond à une droite $\mathcal{D}$ parallèle à (BC) ce qui est exclu par l'énoncé.*

— ***Équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$, parallèle à (BC) passant par A :*** *on trouve* $\boxed{\mathcal{D}' \ : x+y=0}$.

— ***Coordonnées de E :*** *il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $E = A' + \lambda\overrightarrow{AB}$, *c'est-à-dire* $\begin{cases} x &= \dfrac{c(1-b)}{c-b} + \lambda \\ y &= \dfrac{b(1-c)}{b-c} \end{cases}$. *Puisque* $E \in \mathcal{D}'$, $x+y=0$ *et on en tire que* $\boxed{E\left|\begin{matrix} \dfrac{b(1-c)}{c-b} \\ \dfrac{b(1-c)}{c-b} \end{matrix}\right.}$.

— ***Coordonnées de F :*** *de la même façon, en écrivant* $F = A' + \lambda\overrightarrow{AC'}$, *on trouve que* $\boxed{F\left|\begin{matrix} \dfrac{c(1-b)}{c-b} \\ -\dfrac{c(1-b)}{c-b} \end{matrix}\right.}$.

— *Pour montrer que $(B'E)$ et $(C'F)$ sont parallèles, calculons* $\boxed{\overrightarrow{B'E}\left|\begin{matrix} \dfrac{b(1-c)}{c-b} \\ \dfrac{b(b-1)}{c-b} \end{matrix}\right.}$ *et* $\boxed{\overrightarrow{C'F}\left|\begin{matrix} \dfrac{c(1-c)}{c-b} \\ -\dfrac{c(1-b)}{c-b} \end{matrix}\right.}$. *Ensuite, calculons le déterminant* $\det(\overrightarrow{B'E}, \overrightarrow{C'F}) = \dfrac{1}{(c-b)^2}\left[-bc(1-c)(1-b) - bc(b-1)(1-c)\right] = 0$ *après simplifications. Le résultat est montré.*

Références