Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On note E l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit un réel $a \in \mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions f vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x)$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F.

Solution : *On applique le théorème de résolution des équations différentielles homogène du premier degré sans second membre et les fonctions f solutions de $y' - ay = 0$ sont celles de la forme $f : x \mapsto \alpha e^{ax}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que $F = Vect\,(x \mapsto \exp(ax))$ et que c'est un sous-espace vectoriel de E. Il est alors clair que la famille $(x \mapsto \exp(ax))$ forme une base de F et que* $\dim F = 1$.

Références