Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

Solution : *Comme $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \mid 2x - y + 3z + t = 0\} = \{(x, 2x + 3z + t, z, t) \mid x, z, t \in \mathbb{R}\} = Vect\left((1, 2, 0, 0), (0, 3, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\right)$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. La famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1, 2, 0, 0)$, $e_2 = (0, 3, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 0, 1)$ engendre F. Montrons qu'elle est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. Le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vérifie $\begin{cases} \alpha_1 & & = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 & & = 0 \\ & \alpha_3 & = 0 \end{cases}$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est bien libre. Alors (e_1, e_2, e_3) est une base de F et $\dim F = 3$.*

Références