# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

*Montrer $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie.*

***Solution :*** *Pour le premier cas, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $e(n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui s'annule à tous les rangs sauf au rang $n$ où elle vaut 1. On considère aussi pour tout $m \in \mathbb{N}$ la famille de suites $E_m = (e(0), \dots, e(m))$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, cette famille est libre. En effet, si $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha_0 e(0) + \dots + \alpha_m e(m) = 0$ alors on obtient $(\alpha_0, \dots, \alpha_m, 0, \dots) = (0, \dots)$ et donc que $\alpha_0 = \dots = \alpha_m = 0$. Supposons que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. La famille $E_n$ est libre et de cardinal $n+1$ ce qui n'est pas possible. Donc $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.*

*Pour le second cas, on procède de même en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $f_n$ définies sur $\mathbb{R}$ qui valent 0 si $x \neq n$ et qui valent 1 si $x = n$.*

## Références