Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Soit $\mathscr{F} = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_i = i.$$

Prouver que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution : *Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, supposons que que $P_k = \lambda_k X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i,k} X^i$. Comme $\deg P_k = k$, on a nécessairement $\lambda_k \neq 0$. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$. Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on aboutit au système :*

$$\begin{cases} \lambda_0\alpha_0 + \lambda_{0,1}\alpha_1 & +\lambda_{0,2}\alpha_2 + \dots & & +\lambda_{0,n}\alpha_n = 0 \\ \lambda_1\alpha_1 & +\lambda_{1,2}\alpha_2 + \dots & & +\lambda_{1,n}\alpha_n = 0 \\ & \dots & & \\ & & \lambda_{n-1}\alpha_{n-1} & +\lambda_{n-1,n}\alpha_n = 0 \\ & & & \lambda_n\alpha_n = 0 \end{cases}$$

qui est triangulaire, et comme $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k \neq 0$, son unique solution est le $n+1$-uplet nul. Il vient : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ et la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme elle est de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{F}$ est de plus génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit qu'elle forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Références