Bissectrices de deux droites

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Bissectrices de deux droites***

On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non parallèles et d'équations normales respectives :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \text{ et } x\cos\theta' + y\sin\theta' - p' = 0$$

où $p, p' \in \mathbb{R}$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \theta' \ [\pi]$.

1. *Déterminer une équation normale de chacune de leurs bissectrices*[1].
2. *Montrer que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont des vecteurs unitaires qui dirigent les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ alors les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'}$ dirige chacune de ces deux bissectrices.*
3. *Montrer que ces deux bissectrices sont perpendiculaires.*

Solution :

1. *Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
& M \text{ est un point d'une des bissectrices aux deux droites} \\
\iff & d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') \\
\iff & \frac{|x\cos\theta + y\sin\theta - p|}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{|x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'|}{\cos^2\theta' + \sin^2\theta'} \\
\iff & |x\cos\theta + y\sin\theta - p| = |x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'| \\
\iff & x\cos\theta + y\sin\theta - p = x\cos\theta' + y\sin\theta' - p' \quad \text{ou} \quad x\cos\theta + y\sin\theta - p = -\left(x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'\right) \\
\iff & \left(\cos\theta - \cos\theta'\right)x + \left(\sin\theta - \sin\theta'\right)y = p - p' \quad \text{ou} \quad \left(\cos\theta + \cos\theta'\right)x + \left(\sin\theta + \sin\theta'\right)y = p + p' \\
\iff & -2\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}\sin\tfrac{\theta-\theta'}{2}x + 2\cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}\sin\tfrac{\theta-\theta'}{2}y = p - p' \quad \text{ou} \quad 2\cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\tfrac{\theta-\theta'}{2}x + 2\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\tfrac{\theta-\theta'}{2}y = p + p' \\
\iff & -\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p-p')}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}} \quad \text{ou} \quad \cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p+p')}{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui est licite car $\theta \neq \theta' \ [\pi]$. Les équations des deux bissectrices sont donc :

$$\boxed{-\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p-p')}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}}} \quad \boxed{\cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p+p')}{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}}$$

1. Voir la note 1

Ces deux équations sont de plus normales.

2. *Comme* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{u}'$ *sont unitaires, on peut supposer que* $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ *et que* $\overrightarrow{u}' = (\cos\theta', \sin\theta')$ *alors*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' = (\cos\theta + \cos\theta', \sin\theta + \sin\theta') = 2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\left(\cos\frac{\theta+\theta'}{2}, \sin\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

qui dirige clairement la première bissectrice. De même :

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}' = (\cos\theta - \cos\theta', \sin\theta - \sin\theta') = 2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\left(-\sin\frac{\theta+\theta'}{2}, \cos\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

qui dirige la deuxième.

3. *Comme* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') . (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}'\|^2 = 0$, *les deux bissectrices sont perpendiculaires.*

Références