Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Vérifier que $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.*
2. *Montrer que*
$$E = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\right\}$$
est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
3. *Trouver une base de E.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel vérifie les axiomes définissant un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel*
2. *Pour répondre à la question, il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. E est clairement non vide et si $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$, $u = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \in E$ et $u' = a'+b'\sqrt{2}+c'\sqrt{3} \in E$ alors $\alpha u + \alpha' u' = \alpha\left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right) + \alpha'\left(a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}\right) = (\alpha a + \alpha' a') + (\alpha b + \alpha' b')\sqrt{2} + (\alpha c + \alpha' c')\sqrt{3} \in E$. L'ensemble E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. On peut aussi remarquer que $E = Vect\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.*
3. *Montrons que la famille $e = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est une base de E. Elle engendre clairement E. Soient $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Alors $c\sqrt{3} = -\left(a + b\sqrt{2}\right)$ et en élevant au carré $3c^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$.*
   (a) *Si a et b sont nuls, on a forcément $c = 0$.*
   (b) *Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $3c^2 = 2b^2$ et $c/b = \pm\sqrt{2/3}$ ce qui n'est pas possible car $c/b \in \mathbb{Q}$.*
   (c) *Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $3c^2 = a^2$ et $c/a = \sqrt{3}/3$ ce qui n'est pas possible pour la même raison que précédemment.*
   (d) *Si $a, b \neq 0$ alors $\sqrt{2} = \left(3c^2 - a^2 - 2b^2\right)/2ab$ ce qui n'est pas possible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

   En conclusion, $a = b = c = 0$ et la famille est libre. On a ainsi trouvé une base de E qui est de dimension 3.

Références