Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e=(e_1,\dots,e_n)$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $\varepsilon_i=e_1+\dots+e_i$.

1. *Montrer que $\varepsilon=(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forme une base de E.*
2. *Exprimer les composantes d'un vecteur de E dans ε en fonction de ses composantes dans e.*

Solution :

1. *Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varepsilon_i=0$. On a alors*

$$(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)\,e_1+(\alpha_2+\dots+\alpha_n)\,e_2+\dots++\alpha_n e_n=0$$

qui conduit, de part la liberté de e, à :

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 & +\dots+\alpha_n & =0\\ \quad\alpha_2 & +\dots+\alpha_n & =0\\ & & \vdots\\ & \qquad\alpha_n & =0\end{cases}$$

et donc $\alpha_n=\dots=\alpha_1=0$.

2. *Soit $x\in E$. On a $x=\alpha_1e_1+\dots\alpha_ne_n=\alpha'_1\varepsilon_1+\dots\alpha'_n\varepsilon_n$. On a donc :*

$$\begin{cases}\alpha'_1+\alpha'_2 & +\dots+\alpha'_n & =\alpha_1\\ \quad\alpha'_2 & +\dots+\alpha'_n & =\alpha_2\\ & & \vdots\\ & \qquad\alpha'_n & =\alpha_n\end{cases}$$

ce qui amène :

$$\begin{cases} \alpha'_1 = & \alpha_1 - \alpha_2 \\ \vdots & \\ \alpha'_{n-1} = & \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha'_n = & \alpha_n \end{cases}$$

et $\boxed{x = (\alpha_1 - \alpha_2)\, e_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)\, e_2 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\, e_{n-1} + \alpha_n e_n}$.

Références