

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 0, 0, 1)$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Compléter cette famille en sorte d'avoir une base de \mathbb{R}^4 .

Solution :

1. Comme $e_3 = e_2 - e_1$, la famille e n'est pas libre. Par contre, comme les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, (e_1, e_2) forme une famille libre qui engendre encore E par le lemme de diminution d'une famille liée. On complète la base par des vecteurs de la base canonique.
2. Une solution peut être de compléter la famille (e_1, e_2) avec les vecteurs $f_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $f_2 = (0, 0, 1, 0)$ de la base canonique de \mathbb{R}^4 . On montre facilement que la famille (e_1, e_2, f_1, f_2) est libre. Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, elle forme une base de \mathbb{R}^4 .

Références