Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *:*

$$u = (-1,1,1)\,, \quad v = (1,-1,1)\,, \quad w = (1,1,-1) \quad \text{et} \quad x = (2,-3,1)\,.$$

1. *Prouver que la famille* (u,v,w) *forme une base* $\mathbb{R}^3$.
2. *Quelles sont les coordonnées de* x *dans cette base ?*

Solution :

1. *Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0$. *Le triplet* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *est solution du système :* $\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 & +\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & +\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_3 = 0 \end{cases}$ *et donc* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. *La famille* (u,v,w) *est bien libre. Comme* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, *c'est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *La famille* (u,v,w) *étant une base de* E, *il existe* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$. *Le triplet* (x_1,x_2,x_3) *est donc solution du système* $\begin{cases} -x_1 + x_2 & +x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 & +x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 & -x_3 = 1 \end{cases}$. *En le résolvant, on trouve* $x_1 = -1$, $x_2 = 3/2$ *et* $x_3 = -1/2$. *Les coordonnées de* x *dans la base* (u,v,w) *sont donc :* $\boxed{(-1, 3/2, -1/2)}$

Références