Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que les vecteurs* $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (-1, 2)$ *et* $f_3 = (-3, 5)$ *forme une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Exprimer un vecteur quelconque* u *de coordonnées* (x, y) *dans la base canonique comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Cette décomposition est-elle unique ?*

Solution :

1. *Les vecteurs* f_1 *et* f_2 *ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. Comme* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *la famille* $f = (f_1, f_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$. *Elle engendre donc* $\mathbb{R}^2$ *et il en est alors de même de la famille* (f_1, f_2, f_3).
2. *Introduisons les deux vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *:* $e_1 = (1, 0)$ *et* $e_2 = (0, 1)$. *D'après ce qui précède, il existe* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que* $u = xe_1 + ye_2 = af_1 + bf_2 + cf_3$. *Le triplet* (a, b, c) *est solution du système* $\begin{cases} a - b & -3c = & x \\ 2a + 2b & +5c = & y \end{cases}$. *Ce système admet une infinité de solutions et la décomposition recherchée n'est pas unique. Une d'entre elles est donnée par exemple par* $a = x/2 + y/4$, $b = -x/2 + y/4$ *et* $c = 0$.

Références