Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose :

$$f_1 = e_2 + 2e_3, \quad f_2 = e_3 - e_1, \quad f_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $f = (f_1, f_2, f_3)$ est aussi une base de E

Solution : *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$. Alors $\alpha_1 (e_2 + 2e_3) + \alpha_2 (e_3 - e_1) + \alpha_3 (e_1 + 2e_2) = 0$ et $(\alpha_3 - \alpha_2) e_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_3) e_2 + (2\alpha_1 + \alpha_2) e_3 = 0$. Comme la famille e est libre, le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est solution du système $\begin{cases} \quad - \alpha_2 \quad + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \qquad + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \qquad = 0 \end{cases}$ et on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = \# e$, la famille e est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Références