Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *engendré par les familles de vecteurs* (u_1, u_2, u_3, u_4) *avec :*

1. $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 0, 1)$, $u_4 = (1, 0, 0, 1)$
2. $u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 1)$, $u_4 = (0, 1, 0, 1)$
3. $u_1 = (1, -1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 2, -2)$, $u_3 = (3, -1, 4, -4)$, $u_4 = (0, -2, -1, 1)$.

Solution :

1. *Soient* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ *tels que* $\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i = 0$. *les scalaires* α_i *vérifient alors le système :* $\begin{cases} \alpha_1 & & & +\alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & & = 0 \\ & \alpha_2 & & +\alpha_4 & = 0 \end{cases}$. *On a une solution non nulle :* $(1, 1, -1, -1)$. *La famille est donc liée et engendre un espace de dimension au plus* 3. *On vérifie que* (u_1, u_2, u_3) *est libre. Dans le système précédent on fait* $\alpha_4 = 0$. *On trouve alors* $\alpha_1 = 0$ *puis* $\alpha_3 = 0$ *et* $\alpha_2 = 0$. *Donc la famille* (u_1, u_2, u_3, u_4) *engendre un espace de dimension* 3.
2. *On vérifie que* $u_4 = u_1 - u_2 + u_3$. *On montre de la même façon que précédemment que la famille* (u_1, u_2, u_3) *est libre. Donc* $\dim Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$.
3. *On a :* $u_3 = 2u_1 + u_2$ *et* $u_4 = u_1 - u_2$. *Les vecteurs* u_1 *et* u_2 *ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre. Par suite* $\dim Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = \dim Vect(u_1, u_2) = 2$.

Références