Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $S = (f_1, \dots, f_n)$ est libre. On calculera d'abord pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'intégrale :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px)\, \sin(qx)\, \mathrm{d}x = \delta_{pq},$$

où $\delta_{pq} = 1$ si $p = q$ et est nul sinon.

Solution : *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On utilise la trigonométrie. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sin(px)\, \sin(qx) = \frac{1}{2} \left(\cos\left((p-q)\, x \right) - \cos\left((p+q)\, x \right) \right)$$

donc si $p \neq q$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px)\, \sin(qx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{p-q} \sin\left((p-q)\, x \right) - \frac{1}{p+q} \sin\left((p+q)\, x \right) \right]_0^{2\pi} = 0$$

et si $p = q$ alors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px)\, \sin(qx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos\left((p+q)\, x \right) \right)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[x - \frac{1}{p+q} \sin\left((p+q)\, x \right) \right]_0^{2\pi} = 1.$$

Montrons que S est libre. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\pi} \int_0^{2\pi} f_k\,(x)\, f_i\,(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ki} = \alpha_k.$$

et ce pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que S est libre.

Références