Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre. Les familles

$$S = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$$

$$T = (u_1 + u_2, \dots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$$

sont-elles libres ?

Solution : *La famille S est liée car*

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) + (u_n - u_1) = 0_E$$

Pour la famille T : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\lambda_1(u_1 + u_2) + \cdots + \lambda_n(u_n + u_1) = 0_E$$

Comme $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, il vient que

$$\lambda_1 + \lambda_n = 0_K, \quad \lambda_2 + \lambda_1 = 0_K, \dots, \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0_K$$

Par conséquent,

$$\lambda_1 = (-1)^{i-1}\lambda_i = (-1)^n \lambda_1.$$

Si n est impair, $2\lambda_1 = 0_K$ et donc $\lambda_1 = 0$, puis alors tous les coefficients sont nuls. Si n est impair, T est une famille libre.

Si par contre n est pair, on vérifie que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1}(u_i + u_{i+1}) + (-1)^{n-1}(u_n + u_1) = 0_E$$

et donc T est lié.

Références