Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *montrer que la famille* $S = (x \to 1, x \mapsto \operatorname{ch} x, x \mapsto \operatorname{ch} 2x, \dots, x \mapsto \operatorname{ch} nx)$ *est libre.*

Solution : *Au voisinage de* $+\infty$, *on a l'équivalent* $\operatorname{ch} nx = \dfrac{e^{nx}+e^{-nx}}{2} = \dfrac{e^{nx}}{2}\left(1+e^{-2nx}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{nx}}{2}$
car $1+e^{-2nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. *Soient* $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{ch} x + \dots + \alpha_n \operatorname{ch} nx = 0$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 e^{-nx} + \alpha_1 \operatorname{ch}(x)\, e^{-nx} + \dots + \alpha_n \operatorname{ch}(nx)\, e^{-nx} = 0.$$

En vertu de l'équivalent, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{ch}(kx)\, e^{-nx} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{(k-n)x}/2$ *et*

$$\operatorname{ch}(kx)\, e^{-nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } k<n \\ 1/2 & \text{si } k=n \end{cases}.$$

Donc la somme précédente ne tend vers 0 *que si* $\alpha_n = 0$. *On répète* n *fois ce raisonnement et on montre que* $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$. *La famille* S *est bien libre.*

Références