# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

**Exercice 0.1** ★★ **Pas de titre**

*Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère ensuite l'application*

$$\varphi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f^{(k)}(0) \end{array} \right. \qquad (k \in [\![1,n]\!])$$

*Montrer que l'application $\varphi_k$ est linéaire, puis que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre dans l'espace $L(E,\mathbb{R})$.*

***Solution :*** *On montre que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il est aussi facile de montrer que les applications $\varphi_k$ sont linéaires. Montrons ensuite que la famille est libre. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0_{L(E,\mathbb{R})}$$

*En appliquant cette application linéaire à la fonction $\theta_k : x \mapsto x^k \in E$, on trouve que*

$$\lambda_k k! = 0$$

*(car $[x^k]^{(p)}(0) = k!$ si $p = k$ et $[x^k]^{(p)}(0) = 0$ si $p \neq k$. On en déduit donc que $\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = 0$.*

## Références