Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille de vecteurs $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ libre. On définit les vecteurs

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_n = a_1 + \dots + a_n$$

Montrer que la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre.

Solution : *Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que*

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0_E$$

Alors

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n)a_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)a_{n-1} + \lambda_n a_n = 0$$

Comme $(a_1, \dots, a_n)$ est libre, on tire que

$$\lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_n + \dots + \lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}$$

et par conséquent que tous les λ_k sont nuls.

Références