Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les 4 points $A\,(-1,3)$, $B\,(-6,-2)$, $C\,(2,-6)$ *et* $D\,(3,1)$.

1. *Montrer que* $ABCD$ *est un trapèze.*
2. *Calculer les coordonnées de l'intersection de ses diagonales.*
3. *Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.*
4. *Calculer l'aire de* $ABCD$.

Solution :

1. *Comme* $\overrightarrow{AD}=(4,-2)$ *et* $\overrightarrow{BC}=(8,-4)$ *il est clair que* $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$ *et que les droites* (AD) *et* (BC) *sont parallèles. Par suite,* $ABCD$ *est un trapèze.*
2. *On calcule une équation cartésienne de* (AC). *Cette droite est dirigée par* $\overrightarrow{AC}=(3,-9)$ *ou encore par le vecteur* $\overrightarrow{u}=(1,-3)$. *Un vecteur normal à cette droite est donc* $\overrightarrow{n}=(3,1)$. *Une équation cartésienne de* (AC) *est donc de la forme* $3x+y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $A\in(AC)$, *il vient que* $c=0$. *Donc* $(AC):\ 3x+y=0$. *On montre de même que* $(BD):\ -x+3y=0$. *On remarque que ces deux droites passent par l'origine du repère donc leur point d'intersection est* O.
3. *Un vecteur normal à* (AC) *est* $\overrightarrow{n}=(3,1)$ *et un vecteur normal à* (BD) *est* $\overrightarrow{n}'=(-1,3)$. *Il est clair que* $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}'=0$ *et donc que les diagonales sont perpendiculaires.*
4. *On utilise la formule vue au collège. Si* $\mathcal{A}$ *désigne l'aire de* $ABCD$ *alors* $\mathcal{A}=(\text{ petite base}+\text{ grande base})\times\text{ hauteur}/2$. *On sait que* $\text{petite base}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=2\sqrt{5}$ *et* $\text{grande base}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=4\sqrt{5}$. *De plus*

$$\text{hauteur}=d\,(A,(BC))=\frac{\left|\det \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right|}{\|BC\|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-5&8\\-5&-4\end{matrix}\right\|}{4\sqrt{5}}=\frac{\left|-20\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\right|}{4\sqrt{5}}=\frac{60}{4\sqrt{5}}$$

et $\mathcal{A}=45$.

Références