Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Les familles de fonctions suivantes sont-elles libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

1. $(f_1,\dots,f_n)$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\forall k \in [1,n]$,
$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x+k} \end{cases}$$
2. (f_1,f_2,f_3) *où* $\forall k \in [1,3]$,
$$f_i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-k)^2 \end{cases}$$
3. (f_1,f_2,f_3,f_4) *où* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$ *et* $f_4(x)=e^x$.

Solution :

1. *Puisque* $\forall x \in \mathbb{R}$, $e.e^{x+1}-e^{x+2}=0$, *on en déduit que* (e^{x+1},e^{x+2}) *est lié, donc la famille est lié.*
2. *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x-1)^2+b(x-2)^2+c(x-3)^2=0$$
alors puisque ce polynôme est nul, les coefficients de $x^2,x,1$ *du polynôme et de ses dérivées doivent être nuls. On en tire*
$$a+b+c=a+2b+3c=a+4b+9c=0 \Rightarrow a=b=c=0$$
Par conséquent, la famille est libre.
3. *Soient* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ *tels que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, a+bx+cx^2+de^x=0$$
On doit avoir $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$d+(a+bx+cx^2)e^{-x}=0$$
et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, *on obtient que* $d=0$. *En factorisant ensuite par* x^2 *et en faisant tendre* x *vers* $+\infty$, *on trouve que* $c=0$. *Ensuite de même* $b=0$ *et enfin* $a=0$. *La famille est libre.*

Références