Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, considérons l'application

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{cases} .$$

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution : *Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=0}^{2} \alpha_i f_i = 0$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 |x| + \alpha_1 |x-1| + \alpha_2 |x-2| = 0$. En prenant successivement $x = 0, 1$ et 2 dans cette égalité, on aboutit au système : $\begin{cases} & \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 & + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_0 + \alpha_1 & = 0 \end{cases}$ dont l'unique solution est $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0)$. La famille (f_0, f_1, f_2) est bien libre.*

Autre solution : On suppose $\alpha_0 \neq 0$ et on a $|x| = -\frac{1}{\alpha_0} (\alpha_1 |x-1| + \alpha_2 |x-2|)$. Or cette égalité est impossible car le membre de droite est dérivable en zéro et le membre de gauche ne l'est pas. Donc $\alpha_0 = 0$. On démontre de même que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$.

Références