Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathscr{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, *on considère les quatre fonctions :*

$$f_1 : \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos x \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{cases} \qquad f_4 : \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin x \end{cases}$$

Prouver que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) *est libre.*

Solution : *Soit* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ *tel que* $\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \alpha_3 \cdot f_3 + \alpha_4 \cdot f_4 = 0$. *On a donc :*

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \alpha_3 \cdot f_3(x) + \alpha_4 \cdot f_4(x) = 0,$$

en particulier, remplaçant x *par* $x = 0$ *puis* $x = \pi$, *on obtient le système* $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2\pi = 0 \end{cases}$ *puis remplaçant* x *par* $x = \frac{\pi}{2}$ *puis* $x = \frac{3\pi}{2}$, *on obtient le système* $\begin{cases} \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \frac{3\pi}{2}\alpha_4 = 0 \end{cases}$ *d'où* $\forall i \in [\![1, 4]\!], \quad \alpha_i = 0$.

Références