Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour $u \in L(E)$, on définit

$$u^{\mathrm{T}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E^\star & \longrightarrow & E^\star \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array} \right.$$

1. *Montrer que $u^{\mathrm{T}} \in L(E^\star)$.*
2. *Si $(u, v) \in L(E)^2$, calculer $(u \circ v)^{\mathrm{T}}$.*
3. *Montrer que l'application*

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E^\star) \\ u & \longmapsto & {u^{-1}}^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$$

   est un morphisme de groupes.
4. *Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, montrer que θ est injectif.*

Solution :

1. *Soit $\varphi, \psi \in L(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors $u^{\mathrm{T}}(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\alpha\varphi + \beta\psi) \circ u = \alpha\varphi \circ u + \beta\psi \circ u = \alpha u^{\mathrm{T}}(\varphi) + \beta u^{\mathrm{T}}(\psi)$. Donc $u^{\mathrm{T}} \in L(E^\star)$.*
2. *Soit $\varphi \in E^\star$. Calculons*

$$v^{\mathrm{T}} \circ u^{\mathrm{T}}(\varphi) = v^{\mathrm{T}}(\varphi \circ u) = \varphi \circ (u \circ v) = (u \circ v)^{\mathrm{T}}(\varphi)$$

   Par conséquent, $(u \circ v)^{\mathrm{T}} = v^{\mathrm{T}} \circ u^{\mathrm{T}}$.
3. *θ est bien définie. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Comme f est inversible, il existe $f^{-1} \in L(E)$ vérifiant $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$. Mais en transposant, ${f^{-1}}^{\mathrm{T}} \circ f^{\mathrm{T}} = {\mathrm{id}_E}^{\mathrm{T}} = \mathrm{id}_{E^\star}$. On montre de même que $f^{\mathrm{T}} \circ {f^{-1}}^{\mathrm{T}} = \mathrm{id}_{E^\star}$. Ce qui montre que ${f^{-1}}^{\mathrm{T}}$ est inversible dans $L(E^\star)$. On vérifie sans problème que θ est un morphisme de groupes en utilisant 2.*
4. *Soit $f \in \operatorname{Ker}\theta$. Alors $\forall \varphi \in E^\star,\ {f^{-1}}^{\mathrm{T}}(\varphi) = \varphi$ et donc*

$$\forall \varphi \in E^\star,\ \varphi \circ f^{-1} = \varphi$$

   En considérant φ_1 et φ_2 les deux projections sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_2)$, on montre que $f = \mathrm{id}_E$.

Références