Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $[0,1]$ et $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & f'(0) \end{array} \right.$.

1. *Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *On pose $H = \operatorname{Ker} \delta$. Trouver un supplémentaire de H dans E.*

Solution :

1. *On montre facilement que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en prouvant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$.*
2. *Montrons que l'ensemble des fonctions affines sur $[0,1]$, noté I, est un supplémentaire de H dans E. Soit $f \in E$. Alors $f = (f - f'(0)\,x) + f'(0)\,x$. Il est clair que $x \mapsto f - f'(0)\,x \in H$ et que $x \mapsto f'(0)\,x \in I$. Donc $E = H + I$. Si $f \in H \cap I$ alors $f'(0) = 0$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$. Alors $a = 0$ et $f = 0$. Donc H et I sont en somme directe. En conclusion, $E = H \oplus I$.*

Références